第26卷 第6期 工 程 数 学 学 报 Vol. 26 No. 6
2009年12月 CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS Dec. 2009

文章编号:1005-3085(2009)06-1057-05

$M^x/M/N$ 可修排队系统*

朱翼隽, 鲍媛媛

(江苏大学理学院，镇江 212013)

摘 要: 本文研究了顾客批量到达且服务台忙时与闲时故障率不同的多服务台可修排队系统，推导出了系统的稳态平衡方程以及稳态概率值的求解思路。由于 $N \geq 2$ 时手工计算的复杂性，使用Mathematica软件编程实现了稳态概率值的求取，并最终得到了系统有效服务台数的稳态分布、稳态队长的母函数以及平均队长等重要的系统指标。

关键词: 可修排队；批量到达；稳态概率值；母函数

分类号: **AMS**(2000) 90B22 **中图分类号**: O226 **文献标识码**: A

1 引言

近几年，不同形态的可修排队系统已经得到了深入地研究，获得了很多的成果。关于多服务台可修系统的文献主要有：文献[1]研究了 $M/M/N$ 并联可修排队系统；文献[2]研究了有一个修理工，且忙时与闲时故障率相同的 $M/M/N$ 可修排队系统，给出了多服务台可修系统稳态分布存在的条件；文献[3]和文献[4]研究了有一个修理工，且忙时与闲时故障率不相同的 $M/M/N$ 可修排队系统，并给出了这类多服务台可修系统稳态分布存在条件的一种新形式。可以看出，关于故障率可变的多服务台可修排队系统的研究正在起步，而对批量到达的多服务台可修排队系统的研究尚未见诸于文献；文献中已有的研究仅给出了多服务台可修排队系统稳态概率值简要的求取过程以及 $N=1$ 时稳态概率值的解析表达式，由于 $N \geq 2$ 时系统稳态概率值手工求取的复杂性，没有给出其相应的解析表达式，没有为相关的一些实际问题提供一个解决问题的工具，鉴于此本文在讨论了批量到达且故障率可变的多服务台可修排队系统的基础上，将通过使用Mathematica软件编程实现 $N \geq 2$ 时稳态概率值的求解过程，并给出了一个具体实例，为现实生活中这一多服务台可修系统的研究提供一个简便的工具。

2 模型描述

本文的基本假设如下：

1) 系统中有 N 个服务台，一个修理工。顾客成批到达，每批到达的人数 X 是一个随机变量，批到达流是泊松流，参数为 λ，X 的分布为

$$P\{X=i\}=r_i, \quad i=1,2,\cdots, \quad \sum_{i=1}^{\infty} r_i = 1,$$

收稿日期: 2008-01-07. **作者简介**: 朱翼隽 (1945年2月生)，男，教授. 研究方向：排队论和随机模型.
*基金项目: 国家自然科学基金 (70571030).

且

$$E(X) < \infty, \quad D(X) < \infty, \quad R(z) = \sum_{i=1}^{\infty} r_i * z^i,$$

同一批到达的顾客按随机顺序接受服务。服务时间服从负指数分布，均值为 $1/\mu$，到达过程与服务过程是相互独立的。假设一服务台在空闲时的故障率为 ζ_1，在忙时的故障率为 ζ_2，且故障状态的服务台被修复的概率为 δ。其中 $\lambda, \zeta_1, \zeta_2, \delta$ 和 μ 都是非负常数。

2) 若服务台故障发生在修理工空闲时，服务台立即被修理，否则等待；修理完毕，服务台立即恢复服务，且服务台修复如新。服务规则为FCFS，服务中断时，正在被服务的顾客可转移到其他空闲的有效服务台接受服务，若没有空闲的有效服务台，则在原服务台处等待。

以 $X(t)$ 表示时刻 t 系统中的有效服务台数，$Y(t)$ 表示时刻 t 系统中的顾客数，则随机过程 $\{X(t), Y(t);\, t \geq 0\}$ 描述了系统时刻 t 的瞬时状态，这一随机过程是二维Markov过程。以 $P_{ij}(t)$ 表示系统在时刻 t 的瞬时状态概率，即

$$P_{ij}(t) = P\{X(t) = i,\, Y(t) = j\}, \quad i = 0, 1, \cdots, N; \quad j = 1, 2, \cdots,$$

用 P_{ij} 表示系统处于状态 (i, j) 的稳态概率，即

$$P_{ij} = \lim_{t\to\infty} P\{X(t) = i,\, Y(t) = j\}, \quad i = 0, 1, \cdots, N; \quad j = 1, 2, \cdots.$$

3 系统的稳态平衡方程

通过分析这一模型的各个状态的具体情况，则可以画出这一系统的状态转移图。根据状态转移图，我们可以写出系统所满足的稳态平衡方程如下：

1) 当 $i = 0$ 时

$$(\lambda + \delta)P_{0,0} = \zeta_1 P_{1,0}, \quad j = 0,$$

$$(\lambda + \delta)P_{0,j} = \zeta_2 P_{1,j} + \sum_{k=0}^{j-1} \lambda P_{0,k} r_{j-k}, \quad j > 0.$$

2) 当 $0 < i < N$ 时

$$(i\zeta_1 + \lambda + \delta)P_{i,0} = \delta P_{i-1,0} + \mu P_{i,1} + (i+1)\zeta_1 P_{i+1,0}, \quad j = 0,$$

$$\big[j\zeta_2 + (i-j)\zeta_1 + \lambda + \delta + j\mu\big] P_{i,j}$$

$$= \delta P_{i-1,j} + (j+1)\mu P_{i,j+1} + \big[j\zeta_2 + (i+1-j)\zeta_1\big] P_{i+1j} + \sum_{k=0}^{j-1} \lambda P_{ik} r_{j-k}, \quad j < i,$$

$$\big[i\zeta_2 + \lambda + \delta + i\mu\big] P_{i,j} = \delta P_{i-1,j} + i\mu P_{i,j+1} + \big[i\zeta_2 + \zeta_1\big] P_{i+1,j} + \sum_{k=0}^{j-1} \lambda P_{i,k} r_{j-k}, \quad j = i,$$

$$\big[i\zeta_2 + \lambda + \delta + i\mu\big] P_{i,j} = \delta P_{i-1,j} + i\mu P_{i,j+1} + (i+1)\zeta_2 P_{i+1,j} + \sum_{k=0}^{j-1} \lambda P_{i,k} r_{j-k}, \quad j > i.$$

3) 当 $i=N$ 时

$$(N\zeta_1+\lambda)P_{i,0}=\delta P_{i-1,0}+\mu P_{i,1},\quad j=0,$$

$$\big[(N-j)\zeta_1+j\zeta_2+\lambda+j\mu\big]P_{i,j}=\delta P_{i-1,j}+(j+1)\mu P_{i,j+1}+\sum_{k=0}^{j-1}\lambda P_{i,k}r_{j-k},\quad 0<j<i,$$

$$\big[N\zeta_2+\lambda+N\mu\big]P_{i,j}=\delta P_{i-1,j}+N\mu P_{i,j+1}+\sum_{k=0}^{j-1}\lambda P_{i,k}r_{j-k},\quad j\ge N.$$

4 稳态概率值的编程实现

设

$$G_i(z)=\sum_{j=0}^{\infty}z^jP_{i,j},\quad G(z)=\sum_{i=0}^{N}G_i(z),\quad 0\le i\le N,\quad |z|\le 1,$$

则 $G(z)$ 即为系统队长的母函数，$G_i(1)=\sum_{j=0}^{\infty}P_{i,j}$ 即为系统中有 i 个服务台处于有效状态的稳态概率。运用与文献 [4] 类似的方法，最终可将系统有效服务台数和队长母函数的求解问题转化为 $P_{i,0}$，$i=1,2,\cdots,N$，这 N 个概率值得求解问题，而这 N 个概率值可通过 N 个关于 $P_{i,0}$，$i=1,2,\cdots,N$ 的相互独立的方程求得[6]，从而最终得到系统的性能指标。由于 $N\ge 2$ 时，手工计算这些稳态概率值较为复杂，已有的文献仅给出了 $N=1$ 时系统稳态概率值的表达式，对 $N\ge 2$ 时仅给出了解的存在性证明以及求解的过程，并没有实现过。本文在已有文献的基础上，通过使用 Mathmatica 软件编程实现了 $N\ge 2$ 时本文所讨论的这一类可修系统稳态概率值的求解过程，该程序是使用 Mathmatica 软件的基本语句独立编写而成，在以往的文献中未出现过，主要程序见下：

$$R=\sum_{i=1}^{n-1}r_iz^i;\quad mt=\text{Table}\big[\text{Switch}\,[i-j,\,1,\,-\delta z,\,0],\,i,\,n+1,\,j,\,n+1\big];$$

$$\text{For}\,\big[i=1,\,i\le n,\,i=i+1,\,mt[[i,i]]=((i-1)\mu+(i-1)\zeta_2+\lambda+\delta-\lambda R)z-(i-1)\mu\big];$$

$$mt[[n+1,\,n+1]]=(n\mu+n\zeta_2+\lambda-\lambda R)z-n\mu;$$

$$\text{For}\,\big[i=1,\,i\le n,\,i=i+1,\,mt[[i,i+1]]=-i\zeta_2z\big];$$

$$b=\text{Table}\,[0,1,n+1];\quad b[[1,1]]=(\zeta_1-\zeta_2)P_{1,0}z;$$

$$\text{For}\,\Big[i=2,\,i\le n,\,i=i+1,\,b[[1,i]]=\sum_{m=1}^{i-1}\big(m(\zeta_2+\mu-\zeta_1)-\beta\big)P_{i-1,\,i-m-1}z^{i-m}$$

$$+\sum_{m=1}^{i}m(\zeta_1-\zeta_2)P_{i,i-m}z^{i-m+1}-\sum_{m=1}^{i-1}m\mu P_{i,\,i-m-1}z^{i-m-1}\Big]$$

$$b[[1,n+1]]=\sum_{m=1}^{n}\big(m(\zeta_2+\mu-\zeta_1)-\beta\big)P_{n,n-m}z^{n-m+1}-\sum_{m=1}^{n}m\mu P_{n,n-m}z^{n-m}$$

$$b=\text{Transpose}[b];\quad \text{For}\big[i=1,\,i\le n+1,\,i=i+1,\,p=mt;\ p[[All,i]]=b[[All,i]];\ y_i=p\big];$$

$$g=N[\text{Solve}[hh==0,z]];\quad f=z/.g;\quad ll=\text{Length}[f];\quad j=1;$$

$$\text{For}[i=1,\,i\le ll,\,i=i+1,\,\text{If}\big[0<f[[i]]<1,\,k_j=f[[i]];$$

$$\text{Print}[k_j];\ z=k_j;\ d_j=\text{Det}[y_1]==0;\ \text{Print}[d_j];\ j=j+1\big]\big]$$

$$h=\text{Table}\,\big[(i\zeta_1+\lambda+\delta)P_{i,0}==\mu P_{i,1}+\delta P_{i-1,0}+(i+1)\zeta_1P_{i+1,0},i,2,n-1\big];$$

$kk = (n\zeta_1 + \lambda)P_{n,0} == \mu P_{n,1} + \delta P_{n-1,0};\quad ll = \text{Append}[h, kk];$

$\text{For}\big[i = 1,\ i \le n-2,\ i = i+1,\ b_i = (i\zeta_2 + \lambda + i\mu + (n-i)\zeta_1)P_{n,i}$

$\quad == (i+1)\mu P_{n,i+1} + \delta P_{n-1,i} + \sum_{k=0}^{i-1} P_{n,k}\lambda r_{i-k};\quad ll = \text{Append}[ll, b_i]\big];$

$\text{For}[i = 3,\ i \le n-1,\ i = i+1],\quad \text{For}[j = 1,\ i \le i-2,\ j = j+1],$

$c_{i,j} = \big(j\zeta_2 + \lambda + j\mu + (n-j)\zeta_1\big)P_{i,j} == (j+1)\mu P_{i,j+1} + \delta P_{i-1,j}$

$\quad + \sum_{k=0}^{j-1} P_{n,k}\lambda r_{j-k} + \big(j\zeta_2 + (i+1-j)\zeta_1\big)P_{i+1,j};\quad ll = \text{Append}[ll, c_{i,j}];$

$hh = \text{Det}[mt];\quad hk = \text{Factor}[hh];\quad pk = hk/(z-1);\quad a_1 = \text{Det}[y_1];\quad b_1 = \text{Factor}[a_1];$

$pk2 = b_1/(z-1);\quad z = 1;\quad kg_1 = \delta G_0 - \zeta_2 G_1 == (\zeta_1 - \zeta_2)P_{1,0};$

$hh = \text{Table}\Big[\delta G_i - (i+1)\zeta_2 G_{i+1} == \sum_{m=1}^{i+1} m(\zeta_1 - \zeta_2)P_{i+1,i+1-m}, i, 1, n-1\Big];$

$tt = \sum_{i=0}^{n} G_i == 1;\quad lls = \text{Append}[hh, kg];\quad lls = \text{Append}[lls, tt];\quad s_1 = \{\,\};$

$\text{For}\big[i = 0,\ i \le n,\ i = i+1,\ s_1 = \text{Append}[s_1, G_i]\big];\quad sst = \text{Solve}[lls, s_1];\quad s1 = s_1/.sst;$

$\text{For}\big[i = 0,\ i \le n,\ i = i+1,\ sg_i = s1[[1, i+1]]\big];\quad hk1 = pk * sg_0 == pk_2;\quad ll = \text{Append}[ll, hk1];$

$\text{For}\big[i = 1,\ i \le n-1,\ i = i+1,\ lll = \text{Append}[lll, d_i]\big];\quad \text{result} = \text{Solve}[lll]$

为了检验程序的准确性，将$N = 1$代入程序，此时系统中仅有一个未知变量$P_{0,1}$，通过程序计算的结果为

$$P_{0,1} = \frac{\delta\mu - \delta\lambda - \lambda\zeta_2}{\delta\mu + \mu\zeta_1},$$

得到的这一结果与手工计算的结果一致，从而验证了程序的准确性。由于服务台数较多以及该系统包含的自变量众多，因而得到的包含这些变量的稳态概率值的解析表达式非常巨大，在此就不再一一显示这些包含变量的稳态概率值的解析表达式，仅就一具体实例进行计算并显示最终结果。令$N = 4$, $\lambda = 2$, $\delta = 4$, $\mu = 8$, $\zeta_1 = 1$, $\zeta_2 = 2$，将其代入到程序中，得出结果如下

$$P_{1,0} = 0.0945623,\quad P_{2,0} = 0.182642,\quad P_{2,1} = 0.0488143,$$

$$P_{3,0} = 0.230792,\quad P_{3,1} = 0.0571713,\quad P_{3,2} = 0.00828753,$$

$$P_{4,0} = 0.222297,\quad P_{4,1} = 0.0513266,\quad P_{4,2} = 0.00603873,\quad P_{4,3} = 0.000380259.$$

5 系统的性能指标

根据以上求出的概率值，可求得$G_i(1)$, $i = 0, 1, \cdots, N$，进而可求得系统的稳态可用度$A = \sum_{i=0}^{N} G_i(1)$；系统的稳态故障频度为

$$B = \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{\infty} P_{i,j}\big[(i-j)\zeta_1 + j\zeta_2\big];$$

系统的稳态更新频度为

$$C = \sum_{i=0}^{N-1} \delta G_i(1).$$

同理可求得 $G_i(z)$, $i = 0, 1, \cdots, N$，进一步可得到系统队长的概率母函数

$$G(z) = \sum_{i=0}^{N} G_i(z),$$

再由母函数的性质，系统统计平衡下的平均队长为

$$E[Y] = \left.\frac{\mathrm{d}G(z)}{\mathrm{d}z}\right|_{z=1}.$$

另外，其它的性能指标有：所有服务台有效时系统中顾客数的期望值 $L_N = \sum_{j=1}^{\infty} jP_{N,j}$；有 i 个服务台有效时系统中顾客数的期望值 $L_i = \sum_{j=1}^{\infty} jP_{i,j}$；系统中顾客人数的期望值

$$L_S = \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=1}^{\infty} jP_{N,j}\,;$$

系统中忙碌的服务台数的期望值

$$E(B) = \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=1}^{\infty} iP_{i,j}\,;$$

空闲的服务台数的期望值

$$E(I) = \sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=0}^{i} (i-j)P_{i,j}\,;$$

系统中已坏的服务台数的期望值 $E(D) = N - E(B) - E(I)$。

参考文献：

[1] Neuts M F, Lucantoni D M. A Markovian queue with N servers subject to breakdowns and repairs[J]. Management Science, 1979, 25: 849-861

[2] 吕胜利，岳德权，李静铂. 多服务台可修排队的稳态分布存在条件[J]. 运筹与管理，2005, 14(4): 64-69

[3] 吕胜利，李静铂，岳德权. $M/M/N$ 可修排队稳态分布存在条件的一种新形式[J]. 系统工程理论与实践，2005, 8: 79-84

[4] 岳德权，吕胜利，李静铂. 一个修理工的 $M/M/N$ 可修排队[J]. 燕山大学学报，2003, 27(3): 197-202

$M^x/M/N$ Repairable Queue System

ZHU Yi-jun,　BAO Yuan-yuan

(Faculty of Science, Jiangsu University, Zhenjiang 212013)

Abstract: This paper deals with the $M^x/M/N$ queue system subject to breakdowns where the server lifetimes are different between busy period and idle period. We derive the balance-equation of the steady-state. Because of the complexity of calculating the steady probability for $N \geq 2$, we program and derive the steady probability by using the Mathematica software. After getting the steady probability, some important queueing measures are obtained: the distribution of the effective servers; the moment generating function of the steady-state queue length; and the mean value of the queue length.

Keywords: repairable queue; batch arrival; steady probability; moment generating function